

CONTROLE ADAPTATIVO DE UM HELICÓPTERO COM 3 GRAUS DE LIBERDADE UTILIZANDO REDES WAVELETS COM BIAS

RAFAEL PURCELL BRECKENFELD*, ELDER MOREIRA HEMERLY*

**Divisão de Engenharia Eletrônica, Departamento de Sistemas e Controle,
Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA-IEE-IEES
Praça Mal. Eduardo Gomes, 50, Vila das Acácias, 12228-900
São José dos Campos, São Paulo, Brasil*

Emails: rafaelpb@ita.br, hemerly@ita.br

Abstract— A Biased Wavelet Networks (BWN) combined with a PD controller is proposed in this paper for application in a 3 degrees of freedom (DOF) helicopter model. The controller considered in this work can deal with unmodeled bounded disturbances, as well as unstructured unmodeled dynamics in the vehicle. Lyapunov second method is employed for establishing stable weights adaptation laws, which are tuned on-line, and the control system stability, thereby guaranteeing small tracking errors and bounded control signals. The stability of the control system is presented and realistic simulation results are discussed.

Keywords— Adaptive Control, Wavelets Networks, Underactuated Systems, Autonomous Helicopter, Lyapunov Stability.

Resumo— Neste trabalho é proposta uma Rede *Wavelet* com *Bias* (RWB) combinada ao um compensador linear tipo PD para controle de um modelo de helicóptero com 3 graus de liberdade. O controlador considerado neste trabalho é capaz de compensar distúrbios limitados, bem como dinâmicas não-modeladas do tipo não-estruturadas. O segundo método de Lyapunov é usado na obtenção das leis de adaptação para os pesos da rede, os quais são atualizados em tempo real, e da estabilidade do sistema de controle, garantindo erros de rastreamento pequenos e sinais de controle limitados. A prova de estabilidade do sistema de controle é apresentada e resultados realistas de simulação são discutidos.

Palavras-chave— Controle Adaptativo, Redes Wavelets, Sistemas Subatuados, Helicópteros Autônomos, Estabilidade via segundo Método de Lyapunov.

1 Introdução

Uma abordagem para o problema de rastreamento de uma trajetória de referência de um modelo de helicóptero com 3 graus de liberdade produzido por (Quanser, 2005) é o controlador por realimentação de saída, proposto por (Calise et al., 2001), o qual é baseado em uma Rede Neural Artificial (RNA) do tipo *feedforward*. Porém, o projeto de controle apenas foi testado no ângulo de arfagem (Kutay et al., 2005).

Pode-se ainda definir uma parametrização semelhante à RNA, na qual se utiliza uma função de ativação *wavelet* na camada escondida. Esta estrutura é denominada Rede *Wavelet* (RW). O controlador baseado em uma RW possui a propriedade de aproximação de funções $f \in \mathcal{L}^2(\mathcal{R})$ com precisão arbitrária por meio de combinações lineares de versões dilatadas e transladadas da *wavelet* mãe (Zhang and Benveniste, 1992).

Adicionando-se uma função de ativação de média não nula à camada escondida da RW, obtém-se uma Rede *Wavelet* com *Bias* (RWB) que acrescenta maior grau de liberdade à estrutura da rede, representando com maior precisão os componentes de baixa frequência do sinal a ser estimado. Um trabalho preliminar sobre um controlador adaptativo via RWB para rastreamento de trajetória de robôs móveis foi desenvolvido por (da Silveira Jr, 2003) e deduzida a prova de estabilidade do sistema de controle.

Esta estrutura de controle proposta neste trabalho é semelhante à apresentada em (Lewis et al., 1999) e pertence à classe de controladores baseados em aproximação, os quais objetivam estimar a característica não-linear do sistema. Portanto, as principais contribuições deste trabalho são: 1) proposição de uma lei de adaptação da RWB e deduzir a prova formal de estabilidade do sistema de controle em malha fechada, utilizando-se o método direto de Lyapunov; 2) controle dos 3 graus de liberdade do helicóptero, o que não feito em (Calise et al., 2001) e nem em (Kutay et al., 2005); e 3) comparação do desempenho deste controlador com um compensador linear PID, objetivando ilustrar a melhoria de desempenho, bem como a robustez e a capacidade de adaptação da RWB na presença de variações paramétricas e distúrbios desconhecidos e limitados.

2 Helicóptero com 3 Graus de Liberdade

O helicóptero utilizado consiste em um *Tandem Fan* (TF), um sistema subatuado representado por dois ventiladores em tandem (Quanser, 2005). O modelo dinâmico deste sistema foi proposto por (Galindo and Lozano, 2000) e obtido através da convenção- x para os ângulos de Euler, a partir do movimento de rotação de um corpo rígido. A Figura 1 ilustra o sistema de coordenadas do helicóptero em um eixo cartesiano inercial $\{x, y, z\}$.

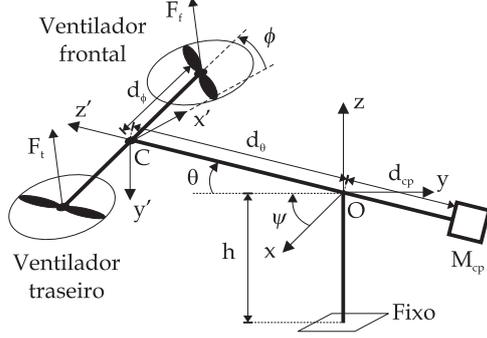


Figura 1: Helicóptero e sistema de coordenadas.

O centro de massa e ponto de guiamento do sistema é dado por C , $\{x', y', z'\}$ denota o eixo cartesiano do corpo do TF, M_h é a massa do helicóptero e M_{cp} é a massa do contrapeso. As coordenadas generalizadas do sistema (\mathbf{q}) são formadas pelo ângulo de rolamento ϕ , pelo ângulo de arfagem θ e pelo ângulo de guinada ψ . O comprimento d_θ é a distância entre os pontos O e C , d_ϕ é a metade da distância entre os ventiladores, d_{cp} é a distância do ponto O ao contrapeso e h é a altura do eixo inercial em relação a um referencial fixo. Os momentos de inércia do TF, referente ao conjunto (ϕ, θ, ψ) , são expressos, respectivamente, por I_ϕ , I_θ e I_ψ . As forças geradas pelos ventiladores são F_f , para o ventilador frontal, e F_t para o traseiro.

As dinâmicas do TF podem ser descritas através do modelo de Euler-Lagrange conforme

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_o(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \tau_d = \tau \quad (1)$$

onde $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz de inércia, a qual é positiva definida, $\mathbf{C}_o(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ é a matriz de Coriolis/Forças Centrípetas, $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^3$ corresponde ao vetor de torque referente ao atrito, $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^3$ é o vetor gravidade, $\tau_d(t) \in \mathbb{R}^3$ denota o vetor de distúrbios desconhecidos e limitados, incluindo dinâmicas não-modeladas do tipo não-estruturada e $\tau \in \mathbb{R}^3$ é o torque no eixo das coordenadas generalizadas. Essas matrizes serão omitidas por questões de espaço, podendo ser encontradas em (Galindo and Lozaro, 2000).

A seguir, serão apresentadas algumas propriedades físicas importantes do helicóptero que simplificam a solução para o problema de controle.

Propriedade 1 A matriz de Coriolis pode sempre ser selecionada de tal forma que $\mathbf{S}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) \equiv \mathbf{M}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}_o(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$ seja anti-simétrica. Portanto, $\mathbf{x}^T \mathbf{S} \mathbf{x} = 0$ para todo vetor \mathbf{x} .

Propriedade 2 O termo de distúrbios é limitado tal que $\|\tau_d(t)\| \leq d_M$, com $\|\cdot\|$ sendo a norma-2.

Na Figura 1, as forças geradas pelos ventiladores, F_f e F_t , podem ser representadas através

da força $F_s \triangleq F_f + F_t$ aplicada no centro de massa do helicóptero (ponto C) e de um torque $F_d d_\phi$ em torno do eixo z' , onde $F_d \triangleq F_f - F_t$. Assumindo que a relação entre as forças geradas pelos ventiladores e as tensões aplicadas aos mesmos (V) é dada por $F = K_f V$, sendo K_f a constante de força dos motores, tem-se de (Galindo and Lozaro, 2000) que o torque τ pode ser descrito por

$$\tau = \mathbf{T}(\mathbf{q})\mathbf{V} \quad (2)$$

sendo $\mathbf{T}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ a matriz de transformação de controle e $\mathbf{V} = [V_f \ V_t]^T$, onde V_f e V_t são as tensões nos ventiladores frontal e traseiro, respectivamente.

Portanto, observa-se que o modelo do helicóptero compreende um sistema não-linear, acoplado e subatuado, ou seja, o comportamento do ângulo de guinada (ψ) é devido ao movimento combinado dos ângulos de rolamento (ϕ) e arfagem (θ). Além disso, os ângulos θ e ψ não são controláveis para $\theta = 0, 5k\pi$, com $k = 1, 3, \dots$ e para $\phi = k\pi$, com $k = 0, 1, \dots$, respectivamente.

3 Controlador Adaptativo via RWB

3.1 Controlador baseado em Aproximação

De (1) e (2), a dinâmica do helicóptero pode ser escrita conforme

$$I_\phi \ddot{\phi} + F_\phi + \tau_{d\phi} = d_\phi K_f V_d \quad (3)$$

$$\bar{\mathbf{M}}(\bar{\mathbf{q}})\ddot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{C}}_o(\dot{\bar{\mathbf{q}}}, \bar{\mathbf{q}})\dot{\bar{\mathbf{q}}} + \bar{\mathbf{F}}(\dot{\bar{\mathbf{q}}}) + \bar{\mathbf{G}}(\bar{\mathbf{q}}) + \bar{\tau}_d = \bar{\tau} \quad (4)$$

onde $\bar{\mathbf{q}} = [\theta \ \psi]^T$ e $\bar{\tau} = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{q})V_s$, continuando válidas as Propriedades 1 e 2 para o helicóptero.

O objetivo do sistema de controle é fazer com que o helicóptero siga uma trajetória de referência, $\bar{\mathbf{q}}_r = [\theta_r \ \psi_r]^T$, a qual é tomada com relação ao ponto C . Encontrar os sinais de controle V_s e V_d que realizam tal tarefa é denominado de problema de projeto para rastreamento de uma trajetória de referência. Assim, dada uma trajetória de referência $\bar{\mathbf{q}}_r$, o erro de rastreamento $\mathbf{e}(t) = [e_\theta(t) \ e_\psi(t)]^T$ e o erro de rastreamento filtrado $\mathbf{r}(t) = [r_\theta(t) \ r_\psi(t)]^T$ são definidos conforme

$$\mathbf{e} = \bar{\mathbf{q}}_r - \bar{\mathbf{q}} \quad (5)$$

$$\mathbf{r} = \dot{\mathbf{e}} + \Lambda \mathbf{e} \quad (6)$$

sendo a matriz positiva definida $\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_\theta, \Lambda_\psi\}$ um parâmetro de projeto. Como (6) é um sistema estável, $\mathbf{e}(t)$ será limitado caso o controlador garanta que o erro filtrado $\mathbf{r}(t)$ seja limitado. De fato, é possível mostrar que

$$\|\mathbf{e}\| \leq \frac{\|\mathbf{r}\|}{\sigma_{\min}(\Lambda)} \quad \text{e} \quad \|\dot{\mathbf{e}}\| \leq \|\mathbf{r}\| \quad (7)$$

onde $\sigma_{\min}(\Lambda)$ é o menor valor singular de Λ .

Diferenciando-se (6) e utilizando-se (4), pode-se reescrever as dinâmicas do helicóptero em função de $\mathbf{r}(t)$ conforme

$$\bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{r}} = -\bar{\mathbf{C}}_o\mathbf{r} + f(\mathbf{x}) + \bar{\tau}_d - \bar{\tau} \quad (8)$$

onde a função não-linear do TF é dada por

$$f(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{M}}(\bar{\mathbf{q}})(\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_r + \Lambda\dot{\bar{\mathbf{e}}}) + \bar{\mathbf{C}}_o(\bar{\mathbf{q}}, \dot{\bar{\mathbf{q}}})(\dot{\bar{\mathbf{q}}}_r + \Lambda\mathbf{e}) + \mathbf{F}(\dot{\bar{\mathbf{q}}}) + \mathbf{G}(\bar{\mathbf{q}}) \quad (9)$$

O vetor \mathbf{x} contém todos os sinais necessários para calcular $f(\cdot)$ e pode ser definido como $\mathbf{x} = [\mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}}^T \bar{\mathbf{q}}_r^T \dot{\bar{\mathbf{q}}}_r^T \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_r^T]^T$. A função $f(\mathbf{x})$ contém todos os parâmetros desconhecidos do helicóptero ou que dificilmente podem ser modelados com precisão, como massa, momentos de inércia e coeficientes de atrito.

Considerando-se a dinâmica não-linear do helicóptero, a lei de controle dinâmica como solução do problema de rastreamento é dada por

$$\bar{\tau} = \hat{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_d\mathbf{r} - \tau_r(t) \quad (10)$$

sendo $\hat{f}(\mathbf{x})$ a estimativa de $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{K}_d\mathbf{r} = \mathbf{K}_d\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_d\Lambda\mathbf{e}$ dois controladores PD, onde \mathbf{K}_d é uma matriz diagonal positiva definida, e $\tau_r(t)$ um sinal auxiliar que fornece robustez ao sistema diante de distúrbios e erros de modelagem. Como $\bar{\tau} = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{q})V_s$, a soma das tensões aplicada aos motores dos ventiladores é descrita por

$$V_s = \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{q})^\dagger[\hat{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_d\mathbf{r} - \tau_r(t)] \quad (11)$$

onde $\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{q})^\dagger$ é a pseudoinversa de $\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{q})$.

Então, o projeto do controlador e a prova de estabilidade do sistema via método direto de Lyapunov são baseados no erro dinâmico de malha, o qual é determinado pela substituição de (10) em (8), resultando

$$\bar{\mathbf{M}}\dot{\mathbf{r}} = -\bar{\mathbf{C}}_o\mathbf{r} - \mathbf{K}_d\mathbf{r} + \tilde{f} + \bar{\tau}_d + \tau_r(t) \quad (12)$$

onde o erro de estimação da função não-linear do helicóptero é dado por $\tilde{f} = f - \hat{f}$.

O problema do projeto do controlador é selecionar um elemento adaptativo capaz de estimar $f(\mathbf{x})$ e definir o termo robusto $\tau_r(t)$ da lei de controle dinâmica (10) tal que o erro dinâmico seja estável. A solução deste problema assegura que o erro de rastreamento filtrado $\mathbf{r}(t)$ seja limitado e (7) garante que o erro de rastreamento $\mathbf{e}(t)$ seja limitado. Logo, o helicóptero segue a trajetória prescrita $\bar{\mathbf{q}}_r(t)$.

O sistema de controle em malha fechada para o ângulo ϕ é feito empregando-se um controlador linear PD na dinâmica de ϕ , dada por (3), o qual é descrito conforme

$$V_d = K_{p\phi}(-\phi_r - \phi) - K_{d\phi}\dot{\phi} \quad (13)$$

Para o projeto do controlador, será suposto, por conveniência, que o torque referente às forças

de atrito F_ϕ e o termo de distúrbio $\tau_{d\phi}(t)$ são nulos. Assim, a função de transferência que descreve o comportamento de ϕ é expressa por

$$\frac{\Phi(s)}{\Phi_r(s)} = -\frac{d_\phi K_f K_{p\phi}}{I_\phi s^2 + d_\phi K_f K_{d\phi} s + d_\phi K_f K_{p\phi}} \quad (14)$$

com $\Phi(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$, onde \mathcal{L} é o operador da transformada de Laplace.

Sendo os ganhos $K_{p\phi}$ e $K_{d\phi}$ constantes positivas, o sistema com a malha fechada internamente descrito por (14) é dito estável. Definindo-se

$$\phi_r(t) \triangleq K_{d\psi} r_\psi(t) = K_{d\psi} \dot{e}_\psi(t) + K_{d\psi} \Lambda_\psi e(t) \quad (15)$$

nota-se uma configuração formada por controladores PD em cascata, onde o controlador PD dado por (15) fornece a referência para o controlador descrito por (13). Conseqüentemente, o ângulo de rolamento $\phi(t)$ só será limitado caso o erro de rastreamento filtrado $\mathbf{r}(t)$ for limitado.

Então, a solução do problema de rastreamento de uma trajetória de referência $\bar{\mathbf{q}}_r(t)$, logo o controle dos 3 graus de liberdade do helicóptero, é dada por (11), (13) e (15). A Figura 2 mostra o diagrama de controle para o helicóptero baseado na técnica de aproximação de função. Note que somente a posição angular do helicóptero é utilizada na realimentação, não necessitando dos estados relativos às velocidades angulares.

3.2 Aproximação da Função Não-linear do Helicóptero via RWB

A motivação para se utilizar a RWB se deve à facilidade de representação de funções de média não-nula pelo termo de *bias*, acrescentando um grau de flexibilidade a mais que a RW. Então, para estimar a característica não-linear do helicóptero, utilizou-se uma RWB do tipo *feedforward* com três camadas, sendo a saída \mathbf{y} um vetor com m componentes, que são determinados em termos de n componentes do vetor de entrada \mathbf{x} , sendo expressa, em notação matricial, por

$$\mathbf{y} = \mathbf{W}^T \varphi(\mathbf{V}^T \mathbf{x} - \mathbf{D}^T) + \mathbf{U}^T \zeta(\mathbf{V}^T \mathbf{x} - \mathbf{D}^T) \quad (16)$$

onde $\varphi(\cdot)$ é a função de ativação *wavelet* e $\zeta(\cdot)$ é a função de ativação do termo de *bias*, ambos definidos conforme, por exemplo, $\varphi(z) = [\varphi(z_1) \varphi(z_2) \cdots \varphi(z_{N_h})]^T$, para N_h unidades da camada escondida (*wavelons*). Os *offsets* das unidades da camada intermediária e da camada de saída, *wavelet* e *bias*, respectivamente, são incluídos na primeira coluna das matrizes de pesos. Assim, os vetores \mathbf{x} , $\varphi(\cdot)$ e $\zeta(\cdot)$ são dados conforme, $\mathbf{x} \equiv [1 \ x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T$, por exemplo. Portanto, \mathbf{W}^T e $\mathbf{U}^T \in \mathbb{R}^{m \times (N_h+1)}$ representam as matrizes de pesos dos parâmetros de saída da função *wavelet* e da função de *bias*, respectivamente, $\mathbf{V}^T \in \mathbb{R}^{N_h \times (n+1)}$ é a matriz de pesos dos

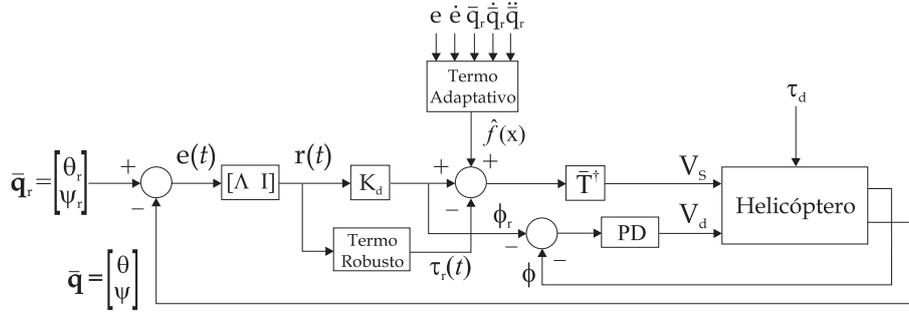


Figura 2: Sistema de controle baseado em aproximação para o helicóptero.

parâmetros de dilatação, $\mathbf{D}^T \in \mathbb{R}^{N_h}$ é o vetor dos parâmetros de translação.

A função não-linear $f(\mathbf{x})$ pode ser escrita por

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^T \varphi(\mathbf{V}^T \mathbf{x} - \mathbf{D}^T) + \mathbf{U}^T \zeta(\mathbf{V}^T \mathbf{x} - \mathbf{D}^T) + \varepsilon \quad (17)$$

com ε sendo o erro de reconstrução. Uma estimação de $f(\mathbf{x})$ pode ser obtida por

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{W}}^T \varphi(\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x} - \hat{\mathbf{D}}^T) + \hat{\mathbf{U}}^T \zeta(\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x} - \hat{\mathbf{D}}^T) \quad (18)$$

sendo $\hat{f}(\mathbf{x})$ a saída da RWB e $\hat{\mathbf{W}}$, $\hat{\mathbf{V}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ e $\hat{\mathbf{U}}$ as estimativas de \mathbf{W} , \mathbf{V} , \mathbf{D} e \mathbf{U} , respectivamente.

A seguir, serão apresentadas algumas definições e suposições necessárias para o desenvolvimento do trabalho.

Suposição 1 A função de ativação wavelet utilizada será $\varphi(z) = \cos(\omega_\varphi z) e^{-z^2/2}$, com $\omega_\varphi = 2,5$ rad/s, e a função de ativação do termo de bias será $\zeta(z) = e^{-z^2/2}$, onde $z = \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x} - \hat{\mathbf{D}}^T$.

Definição 1 O erro de estimação dos pesos ideais das matrizes \mathbf{W} , \mathbf{V} , \mathbf{D} e \mathbf{U} da RWB, bem como suas derivadas são dadas, respectivamente, por $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}$ e $\dot{\tilde{\mathbf{W}}} = -\dot{\hat{\mathbf{W}}}$, por exemplo.

Definição 2 Da Definição 1 e usando o operador $\text{diag}\{z\}$, tem-se $\tilde{\mathbf{Z}} = \text{diag}\{\tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{U}}\}$. As notações matriciais da derivada da função de ativação wavelet e do termo de bias são dadas, respectivamente, por $\dot{\varphi}' = \text{diag}\{\psi'(\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x} - \hat{\mathbf{D}}^T)\}$ e $\dot{\zeta}' = \text{diag}\{\zeta'(\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x} - \hat{\mathbf{D}}^T)\}$.

O erro de estimação da função não-linear do helicóptero é dado por

$$\tilde{f} = \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\varphi}' \cdot z + \tilde{\mathbf{W}}^T (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}' \cdot z) + \tilde{\mathbf{U}}^T \dot{\zeta}' \cdot z + \tilde{\mathbf{U}}^T (\dot{\zeta} - \dot{\zeta}' \cdot z) + \delta \quad (19)$$

onde $z = \hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x} - \hat{\mathbf{D}}^T$ e o termo de distúrbio é definido conforme

$$\delta(t) = \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\varphi}' \cdot z + \mathbf{W}^T O_\varphi(z) + \tilde{\mathbf{U}}^T \dot{\zeta}' \cdot z + \mathbf{U}^T O_\zeta(z) + \varepsilon \quad (20)$$

A partir de (20), é possível definir um limitante superior para a norma do termo de distúrbio $\delta(t)$, o qual é expresso por

$$\|\delta\| \leq C_0 + C_1 \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F + C_2 \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2 + C_3 \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F \|\mathbf{r}\| + C_4 \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F \|\mathbf{r}\|^2 + C_5 \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2 \|\mathbf{r}\| + C_6 \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2 \|\mathbf{r}\|^2$$

sendo C_i , para $i = 1, \dots, 6$, constantes positivas.

3.3 Lei de Adaptação dos Pesos da RWB para Rastreamento Estável

O erro dinâmico do sistema via RWB é determinado a partir da substituição de (19) em (12). As leis de adaptação dos pesos da RWB tal que o desempenho do rastreamento e a estabilidade do sistema de malha fechada são garantidos serão apresentadas a seguir.

Teorema 1 Seja o sistema de controle da Figura 2 para o helicóptero com 3 graus de liberdade, o qual é descrito por (1) e (2), com as leis de controle dadas por (11), (13) e (15), e com o termo robusto expresso por

$$\tau_r(t) = -k_z [\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F + Z_M + (\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F + Z_M)^2] (1 + \|\mathbf{r}\|) \mathbf{r} \quad (21)$$

para $k_z > C_3$, $k_z > C_4$, $k_z > C_5$ e $k_z > C_6$. Considere as leis de adaptação dos pesos da RWB

$$\dot{\tilde{\mathbf{W}}} = \mathbf{F}[\dot{\varphi} - \dot{\varphi}' \cdot (\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x} - \hat{\mathbf{D}}^T)] \mathbf{r}^T - k \|\mathbf{r}\| \mathbf{F} \tilde{\mathbf{W}} \quad (22)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{V}}} = \mathbf{G} \mathbf{x} \mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\varphi}' + \mathbf{G} \mathbf{x} \mathbf{r}^T \hat{\mathbf{U}}^T \dot{\zeta}' - k \|\mathbf{r}\| \mathbf{G} \tilde{\mathbf{V}} \quad (23)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{D}}} = -\mathbf{H} \mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\varphi}' - \mathbf{H} \mathbf{r}^T \hat{\mathbf{U}}^T \dot{\zeta}' - k \|\mathbf{r}\| \mathbf{H} \tilde{\mathbf{D}} \quad (24)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{U}}} = \mathbf{J}[\dot{\zeta} - \dot{\zeta}' \cdot (\hat{\mathbf{V}}^T \mathbf{x} - \hat{\mathbf{D}}^T)] \mathbf{r}^T - k \|\mathbf{r}\| \mathbf{J} \tilde{\mathbf{U}} \quad (25)$$

onde as matrizes positivas definidas \mathbf{F} , \mathbf{G} , \mathbf{J} e os escalares $H > 0$ e $k > 0$, são parâmetros de projeto. Para um ganho \mathbf{K}_d suficientemente grande, pode-se garantir que o erro de rastreamento filtrado $\mathbf{r}(t)$, logo o erro de rastreamento $\mathbf{e}(t)$ e o erro de estimação dos pesos ($\tilde{\mathbf{W}}$, $\tilde{\mathbf{U}}$, $\tilde{\mathbf{V}}$ e $\tilde{\mathbf{D}}$) são uniformly ultimately bounded (UUB).

Prova: Considere a propriedade de aproximação universal da RWB que estima a função não-linear do helicóptero descrita por (17), com uma dada exatidão ε_M para todo \mathbf{x} pertencente ao conjunto

compacto $S_{\mathbf{x}} \equiv \{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x}\| < b_x\}$. Seja a seguinte candidata a função de Lyapunov,

$$V = \frac{1}{2}\mathbf{r}^T \tilde{\mathbf{M}}(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{r} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}^T \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}^T \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{V}}\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{\mathbf{D}}^T H^{-1} \tilde{\mathbf{D}}\} + \frac{1}{2}\text{tr}\{\tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{J}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}\} \quad (26)$$

Nota-se que V é positiva definida, $V > 0$. Então, diferenciando-se V e substituindo (19) e (8), resulta

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{r}^T \mathbf{K}_d \mathbf{r} + \frac{1}{2}\mathbf{r}^T (\dot{\tilde{\mathbf{M}}} - 2\tilde{\mathbf{C}}_o)\mathbf{r} + \mathbf{r}^T (\delta + \bar{\tau}_d + \tau_r) \\ & + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{W}}^T (\mathbf{F}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}} + (\hat{\varphi} - \dot{\varphi}')\mathbf{r}^T)\} \\ & + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{V}}^T (\mathbf{G}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{V}}} + \mathbf{x}\mathbf{r}^T \hat{\mathbf{W}}^T \dot{\varphi}' + \mathbf{x}\mathbf{r}^T \hat{\mathbf{U}}^T \dot{\zeta}')\} \\ & + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{D}}^T (H^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{D}}} + \mathbf{r}^T \hat{\mathbf{W}}^T \dot{\varphi}' + \mathbf{r}^T \hat{\mathbf{U}}^T \dot{\zeta}')\} \\ & + \text{tr}\{\tilde{\mathbf{U}}^T (\mathbf{J}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{U}}} + (\hat{\zeta} - \dot{\zeta}')\mathbf{r}^T)\} \end{aligned} \quad (27)$$

Devido à Propriedade 1 de anti-simetria do sistema, o segundo termo de (27) é anulado. Logo, utilizando-se a Definições 1 e 2, e as lei de adaptação da RWB, obtém-se

$$\dot{V} = -\mathbf{r}^T \mathbf{K}_d \mathbf{r} + k\|\mathbf{r}\|\text{tr}\{\tilde{\mathbf{Z}}^T (\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})\} + \mathbf{r}^T (\delta + \bar{\tau}_d + \tau_r) \quad (28)$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \text{tr}\{\tilde{\mathbf{Z}}^T (\mathbf{Z} - \tilde{\mathbf{Z}})\} &= \langle \tilde{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z} \rangle_F - \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2 \\ &\leq \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F \|\mathbf{Z}\|_F - \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2 \end{aligned} \quad (29)$$

e substituindo-se (21), decorre

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -k_{d_{\min}} \|\mathbf{r}\|^2 - k\|\mathbf{r}\|\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F (\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F - Z_M) + \\ & + \|\mathbf{r}\|(\|\delta\| + \|\bar{\tau}_d\|) - k_z [\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F + Z_M + \\ & + (\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F + Z_M)^2] (1 + \|\mathbf{r}\|) \|\mathbf{r}\|^2 \end{aligned} \quad (30)$$

Da Propriedade 2 e substituindo-se $\|\delta(t)\|$,

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -k_{d_{\min}} \|\mathbf{r}\|^2 - k\|\mathbf{r}\|\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F (\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F - Z_M) \\ & - (k_z - C_3) \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F \|\mathbf{r}\|^2 - (k_z - C_4) \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F \|\mathbf{r}\|^3 \\ & - (k_z - C_5) \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2 \|\mathbf{r}\|^2 - (k_z - C_6) \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2 \|\mathbf{r}\|^3 \\ & + \|\mathbf{r}\| (d_M + C_0 + C_1 \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F + C_2 \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2) \end{aligned} \quad (31)$$

Assim,

$$\dot{V} \leq -\|\mathbf{r}\| [k_{d_{\min}} \|\mathbf{r}\| + (k - C_2) \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F^2 - (kZ_M + C_1) \|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F - (d_M + C_0)] \quad (32)$$

Então, \dot{V} é negativa enquanto o termo entre colchetes em (32) for positivo. Definindo-se $\bar{k} = k - C_2$, $C_3 = (1/2)[(kZ_M + C_1)/(k - C_2)]$, para $k > C_2$ e completando os quadrados, resulta

$$\dot{V} \leq -\|\mathbf{r}\| \{k_{d_{\min}} \|\mathbf{r}\| + \bar{k}(\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F - C_3)^2 - (d_M + C_0) - \bar{k}C_3^2\} \quad (33)$$

e para $\dot{V} < 0$, requer

$$\|\mathbf{r}\| > \frac{d_M + C_0 + \bar{k}C_3^2}{k_{d_{\min}}} \equiv b_r \quad (34)$$

ou

$$\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F > C_3 + \sqrt{C_3^2 + \frac{d_M + C_0}{\bar{k}}} \equiv b_z \quad (35)$$

Pode-se concluir que \dot{V} é negativa definida fora da região delimitada por b_c e b_z (este é o pior cenário, pois \dot{V} pode ser negativa no interior da região). Logo, esse resultado demonstra que $\|\mathbf{r}\|$ e $\|\tilde{\mathbf{Z}}\|_F$ são *uniformly ultimately bounded* (UUB), confirmando a proposição do Teorema 1. \square

As leis de adaptação da RWB apresentam a capacidade adaptação da rede, cujos pesos são ajustados em tempo real, não sendo necessário uma sintonia *off-line* previamente. A malha externa formada pelos controladores PD garante a estabilidade do sistema até que algoritmo de ajuste atualize os pesos da RWB.

Pode-se observar que o termo robusto, expresso por (21), apresenta um papel fundamental na prova formal de estabilidade do sistema de controle. Este termo garante robustez ao sistema na etapa de sintonia dos pesos da RWB, eliminando a influência dos termos de ordem superior do erro de saída da camada escondida, como mostra (31).

4 Resultados de Simulações

Com o intuito de avaliar o desempenho e a robustez do controlador via RWB, considerou-se o problema de rastreamento de trajetória. Dois controladores foram implementados: 1) PDRWB: controlador via RWB e combinado a compensadores lineares tipo PD e 2) PID: estrutura em cascata de controladores lineares tipo PID. O projeto dos compensadores lineares do PDRWB e do PID é baseado em um controlador LQR, procedimento que pode ser visto em (Quanser, 2005).

As simulações foram feitas em MATLAB e utilizou-se os parâmetros do helicóptero com 3 graus de liberdade produzido pela Quanser. Os ganhos escolhidos para os controladores são: $Q = \text{diag}\{100 \ 500 \ 2000 \ 100 \ 60 \ 1500 \ 50 \ 10\}$ e $R = \text{diag}\{5 \ 5\}$; para o projeto do controlador LQR e, consequentemente, dos compensadores lineares. Para o PDRWB, considerou-se $k = 2$, $k_z = 0,05$, $\mathbf{F} = \mathbf{J} = k_c \mathbf{I}_{N_h \times N_h}$, $\mathbf{G} = k_c \mathbf{I}_{n \times n}$, $H = k_c$, para $k_c = 20$, $N_h = 10$ e $Z_M = 10$. Definiu-se um tempo de amostragem de $T = 0,01$ s e um valor de saturação para a tensão nos motores do TF igual a 5V. O vetor de postura inicial (\mathbf{q}_i) para a trajetória de referência e para ambos os controladores foi definido com sendo $\mathbf{q}_i = [0^\circ - 27^\circ 0^\circ]^T$. Considerou-se também nas simulações $\|\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})\| \leq 3,5$ N.m e $\tau_d \sim N(0; 0,01)$.

Utilizando-se 500 realizações Monte Carlo, o desempenho dos controladores é quantificado através do erro médio expresso por

$$\bar{e}_m = \sqrt{\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} [\bar{e}_\theta^2(t) + \bar{e}_\psi^2(t)] dt} \quad (36)$$

onde t_f representa o instante final de uma realização e, $\bar{e}_\theta(t)$ e $\bar{e}_\psi(t)$ são baseados no critério da raiz do erro quadrático médio.

A Figura 3 apresenta o movimento do ponto C do helicóptero, descrito na Figura 1, onde o controlador PID exibe um erro de rastreamento, não sendo capaz de corrigir a trajetória prescrita como o PDRWB. Em $t = 20s$, é aplicado ao sistema um degrau de distúrbio de massa com variação de 17,8%. Com este resultado, pode-se observar a propriedade de aproximação de funções da RWB e a sua capacidade de adaptação, compensando a variação paramétrica, perturbações externas $\tau_d(t)$ e a força de atrito $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$.

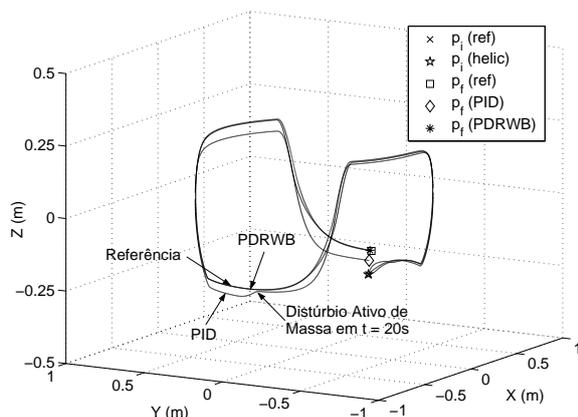


Figura 3: Trajetórias de referência e do helicóptero, onde p_i e p_f são as posturas iniciais e finais.

A Figura 4 apresenta as tensões aplicadas ao helicóptero durante toda a realização. Note que os sinais de controle são limitados, não ultrapassando o valor de 5V. O melhor desempenho do PDRWB sobre o PID é devido à característica da *wavelet* em separar dados em níveis de detalhes variáveis (análise de multi-resolução), o que confere ao PDRWB um tempo de resposta maior diante do degrau de massa.

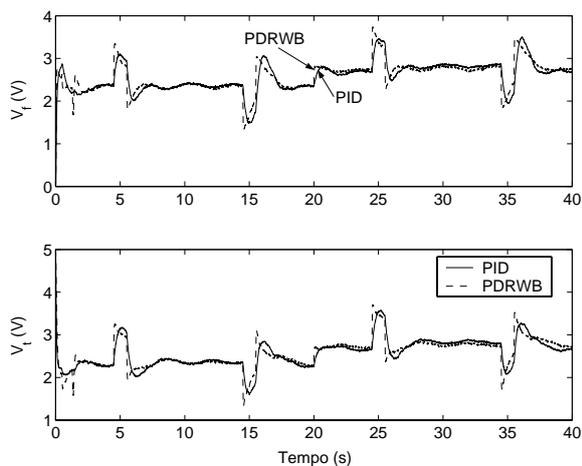


Figura 4: Sinais de controle aplicado ao TF.

O \bar{e}_m do PDRWB foi de $1,18^\circ$, enquanto que o do PID foi de $1,81^\circ$. Este resultado mostra que o controlador dinâmico obtiveram um desempenho

superior ao do PID, proporcionando uma redução de 34,91% no erro médio.

5 Conclusões

Com base nos resultados das simulações, pode-se concluir que o controlador PD combinado à uma RWB (PDRWB) proporcionou melhor desempenho do que o controlador linear PID na solução do problema de rastreamento de trajetória, justificando, assim, o emprego de controle adaptativo em sistemas não-lineares subatuados. Devido à propriedade de aproximação de funções, à capacidade de adaptação da RWB através do ajuste em tempo real dos pesos e à representação da função não-linear do helicóptero em níveis de multi-resolução, o controlador proposto neste trabalho tratou de forma eficiente o distúrbio de massa aplicado ao helicóptero, bem como compensou a influência da força de atrito e de distúrbios limitados e desconhecidos.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da CAPES e do CNPq.

Referências

- Calise, A. J., Hovakimyan, N. and Idan, M. (2001). Adaptive output feedback control of nonlinear systems using neural networks, *Automatica* **37**: 1201–1211.
- da Silveira Jr, A. V. (2003). *Controle cinemático e dinâmico de robôs móveis*, Master's thesis, Instituto Tecnológico de Aeronáutica.
- Galindo, R. and Lozaro, R. (2000). Control of under-actuated systems. application to a tandem fan in 3dof platform, *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications* pp. 686–691.
- Kutay, A. T., Calise, A. J., Idan, M. and Hovakimyan, N. (2005). Experimental results on adaptive output feedback control using a laboratory model helicopter, *IEEE Trans. on Control Systems Technology* **13**(2): 196–202.
- Lewis, F. L., Jagannathan, S. and Yesildirek, A. (1999). *Neural Networks Control of Robot Manipulators and Nonlinear Systems*, Taylor & Francis, New Jersey.
- Quanser (2005). *3D Helicopter System (with active disturbance)*, Quanser Consulting.
- Zhang, Q. and Benveniste, A. (1992). Wavelet networks, *IEEE Transactions on Neural Networks* **3**(6): 889–898.